HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 2

Die formale Mehrpoltheorie in Betriebsparametern

Dr.-Ing. WILHELM KLEIN

1 9 5 6

Die formale Mehrpoltheorie in Betriebsparametern.

Während die Vierpoltheorie heute allgemein zum theoretischen Rüstzeug jedes Fernmeldetechnikers gerechnet wird, ist ihre Erweiterung auf Mehrpole bisher nur sehr wenig bearbeitet worden. Dabei hat man sich auch nur auf praktisch interessierende Einzelfragen beschränkt; eine systematische Bearbeitung fehlt noch. So wurden ein Sonderfall dieser Mehrpoltheorie in den beiden Arbeiten von S h i r o K o i z u m i [1] behandelt, nämlich die Theorie der klemmenzahlsymmetrischen Mehrpole, deren wichtigstes Anwendungsbeispiel das Bündel gekoppelter Leitungen ist. Für den allgemeinen Fall der klemmenzahlunsymmetrischen Mehrpole, zu denen vor allem die Weichen gehören, finden sich Beispiele insbesondere in dem Buch von W. C a u e r [2] sowie in einem aus dem Institut von Prof. Feldtkeller stammenden Aufsatz von G. S c h m i t t [3]. Neuerdings wurde dann in amerikanischen Arbeiten in der Theorie der Mikrowellen ein wichtiges Anwendungsgebiet der Mehrpoltheorie erschlossen.

Die Mehrpoltheorie gliedert sich in drei Teile, neben einem formalen Teil, der in diesem Bericht behandelt werden soll, in einen analytischen und einen synthetischen Teil. Die analytische Mehrpoltheorie hat die Aufgabe, in einer gegebenen Schaltung die Verteilung der Spannungen und Ströme zu berechnen; sie ist grundsätzlich bereits von K i r c h h o f f im Jahre 1847 gelöst. In der synthetischen Mehrpoltheorie sind umgekehrt Eigenschaften der Schaltung vorgeschrieben und die Schaltung wird gesucht. Hier sind besonders in dem wichtigen Sonderfall des Vierpols bereits eine Fülle von Einzelergebnissen vorhanden,

---

1) S. Koizumi — Mehrpolleitungstheorie, Arch.Elektrotechn.XXXIII (1939), S. 171 - 188
Untersuchung über die Fortpflanzungserscheinungen in einer unsymmetrischen Mehrpolleitung, Arch. Elektrotechn. XXXIII (1939), S. 609 - 622

2) W. Cauer — Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 2. Aufl. Berlin 1954

3) G. Schmitt — Ersatzschaltbilder von Sechspolen und höherpoligen Schaltungen, Arch. Elektrotechn. XL (1951) S. 177 - 192

von einer allumfassenden Theorie ist man jedoch noch weit entfernt.

Die Aufgabe der hier behandelten formalen Mehrpoltheorie kann man sich an ihrem primitivsten Sonderfall, dem Zweipol, klarmachen. An sich könnte man die Ströme und Spannungen durch Integration der Differentialgleichungen und Bestimmung der Integrationskonstanten gewinnen. Man kann aber die Rechnungen wesentlich vereinfachen, wenn man erstens den komplexen Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Strom, d.h. den Widerstand bzw. den Leitwert einführt, zweitens die in diesem Fall sehr einfache Beziehung zwischen beiden herstellt (beide sind reziprok zueinander) und drittens den Zusammenhang mit der Schaltung angibt (Addition der Widerstände bei Reihenschaltung und der Leitwerte bei Parallelschaltung). Die entsprechenden drei Probleme findet man in der formalen Vierpoltheorie wieder:

1) Definition der Eingangswiderstände und - leitwerte (Strom und Spannung an den <u>gleichen</u> Klemmen), der Kernwiderstände und - leitwerte (Strom und Spannung an <u>verschiedenen</u> Klemmen), der Uebersetzungen (Strom- bzw. Spannungsverhältnisse an verschiedenen Klemmen) sowie die entsprechenden Grössen in der Wellenparameterdarstellung.

2) Beziehungen dieser Grössen untereinander.

3) Berechnung dieser Grössen für Zusammenschaltungen von Vierpolen.

Insbesondere dieser letzte Punkt lässt sich nur dann übersichtlich darstellen, wenn man, wie es erstmalig F e l d t - k e l l e r und S t r e c k e r getan haben, von der Matrizenrechnung Gebrauch macht. Man kommt so zu den Regeln der Multiplikation der Kettenmatrizen bei Kettenschaltung und der Addition der Leitwertmatrizen, Widerstandsmatrizen bzw. Reihenparallelmatrizen bei Parallelschaltung, Reihenschaltung bzw. Reihenparallelschaltung der Vierpole.

Die Erweiterung dieser formalen Vierpoltheorie zu einer formalen Mehrpoltheorie lässt sich, wie in diesem Bericht gezeigt wird, so durchführen, dass die Definitionen nach Punkt 1) grundsätzlich erhalten bleiben, nur werden die Eingangswiderstände und - leitwerte, die Kernwiderstände und -leitwerte, sowie die Uebersetzungen jetzt Matrizen. Ebenso bleiben die Beziehungen zwischen diesen Grössen nach Punkt 2) und die Regeln für die Zusammenschaltungen der Mehrpole nach Punkt 3) erhalten, wobei jedoch die Schreibweise der Mehrpolformeln gegenüber den Vierpolformeln insofern unwesentlich komplizierter ist, als wegen der Nichtvertauschbarkeit der Matrizen die vordere und die hintere Multiplikation bzw. Division unterschieden werden müssen. Das Ergebnis dieses Berichtes besteht also darin, dass bei Verwendung der Matrizenrechnung die Mehrpolformeln trotz ihrer sehr viel grösseren Allgemeinheit die gleichen sind wie die Vierpolformeln, nur dass man bei den letzteren nicht an die Reihenfolge der Faktoren gebunden ist.

In der formalen Mehrpoltheorie werden also die Ströme und Spannungen einer elektrischen Schaltung auf mehrere verschiedene Arten miteinander verknüpft und es werden die Umrechnungsformeln untereinander abgeleitet. Diese Formeln haben jedoch einen ausserordentlich viel grösseren Anwendungsbereich als nur hier in der Theorie der elektrischen Mehrpole. Sie gelten nämlich ganz allgemein für Systeme linearer Gleichungen, die zwei Gruppen von Veränderlichen von je gleicher Dimension (entsprechend den Strömen und den Spannungen) miteinander verknüpfen, z.B. auch für mechanische Schwingungsprobleme. Wenn wir hier diese Formeln zwar ausschliesslich in der Begriffswelt der elektrischen Netzwerke ableiten, so sind sie doch ohne weiteres auch im allgemeinen Fall anwendbar.

Bezeichnungen.

Die Schaltelemente des Mehrpols.

Ein linearer Mehrpol ist eine Schaltung aus

- Induktivitäten,
- Kapazitäten,
- ohmschen Widerständen und Leitwerten,
- idealen Uebersetzern, (d.h. festgekoppelten Sparübertragern unendlich hoher Induktivität),

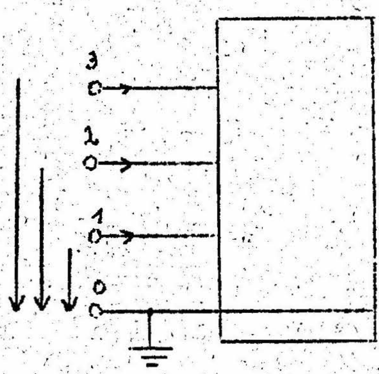
Potentialentkopplern (d.h. festgekoppelten Uebertragern unendlicher hoher Induktivität mit zwei getrennten Wicklungen mit dem Uebersetzungsverhältnis 1 : 1,

linearen Leistungsventilen (d.h. spannungs- oder stromgesteuerten Strom- oder Spannungsquellen, realisiert durch ideale Elektronenröhren oder Transistoren).

Ein solcher Mehrpol hat eine Anzahl von aussen zugänglichen Klemmen. Er wird an diesen Klemmen durch unabhängige Einströmungen oder Urspannungen erregt. Im Inneren des Mehrpols sollen sich keine Einströmungen oder Urspannungen befinden.

Erdunsymmetrische und erdfreie Mehrpole.

Bei den erdunsymmetrischen Mehrpolen nach Abb. 1 werden sämtliche Klemmenspannungen gegenüber einer Klemme, der Erdklemme gemessen und alle Ströme fliessen in die einzelnen Klemmen hinein und aus der Erdklemme wieder hinaus.



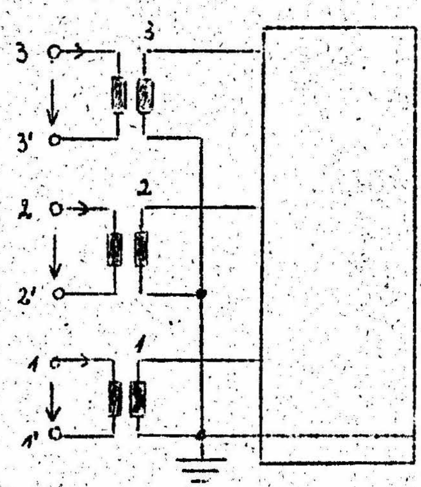


Abb. 1 Erdunsymmetrischer Mehrpol

Abb. 2 Erdfreier Mehrpol

Schaltet man an jede Klemme gegen Erde nach Abb. 2 einen Potentialentkoppler, so erhält man einen Mehrpol mit erdfreien Klemmen, den wir kurz als erdfreien Mehrpol bezeichnen wollen. Bei ihm kann jede Klemme ein beliebiges Potential gegen Erde haben, von Interesse ist nur die Potentialdifferenz (Spannung) jedes Klemmenpaares. Hat der erdunsymmetrische Mehrpol n + 1 Klemmen, so hat der erdfreie Mehrpol 2 n Klemmen bzw. n Klemmenpaare.

Klemmenzahlsymmetrie.

Wir können die Klemmen eines Mehrpols zu zwei oder mehr Klemmengruppen zusammenfassen, wobei bei erdunsymmetrischen Mehrpolen die Erdklemme in sämtlichen Gruppen enthalten sein muss. Z.B. kann man bei einer erdunsymmetrischen Hochtiefweiche drei Klemmengruppen unterscheiden, wobei jede Gruppe allerdings nur aus einer Klemme und der Erdklemme besteht. Man kann aber auch zwei Klemmengruppen bilden, nämlich eine Gruppe mit zwei Klemmen und Erde und die andere mit einer Klemme und Erde. Wir wollen im folgenden bei allen Mehrpolen die Klemmen in zwei Klemmengruppen unterteilen. Diese können gleiche oder verschiedene Klemmenzahlen haben. (Klemmenzahl-Symmetrie bzw. Unsymmetrie). Ein Beispiel eines klemmenzahlunsymmetrischen Mehrpols ist die oben erwähnte Hochtiefweiche, ein Bündel gekoppelter Leitungen ist dagegen ein klemmenzahlsymmetrischer Mehrpol.

Die den Mehrpol erregenden Einströmungen und Urspannungen sollen nur an einer Klemmengruppe angreifen, diese Gruppe wollen wir als die Eingangsklemmen, die andere Gruppe als die Ausgangsklemmen bezeichnen.

Widerstands-Längssymmetrie und Uebertragungssymmetrie.

Klemmenzahlsymmetrische Mehrpole, die beim Vertauschen der Eingangs- und Ausgangsklemmen in ihrem Verhalten nach aussen keinen Unterschied zeigen, heissen widerstands-längssymmetrisch. Mehrpole ohne Leistungsventile heissen übertragungssymmetrisch[3].

Symmetrische Vorzeichen und Kettenvorzeichen.

Die Richtungspfeile der Ströme und Spannungen an einem erdunsymmetrischen Mehrpol wählt man im allgemeinen nach Abb. 3, d.h. die Spannungen werden von der Klemme zur Erde positiv gerechnet und sämtliche in die Klemmen (ausser der Erdklemme) hineinfliessenden Ströme sollen positiv sein. Diese Vorzeichen

---

3) Diese von Feldtkeller neuerdings gebrauchte Bezeichnung erscheint zweckmässiger als die frühere Bezeichnung "umkehrbar", die man leicht mit der Widerstands-Längssymmetrie verwechselt.

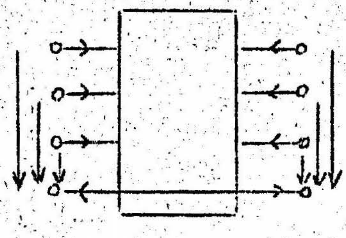


Abb. 3 Symmetrische Vorzeichen am Mehrpol

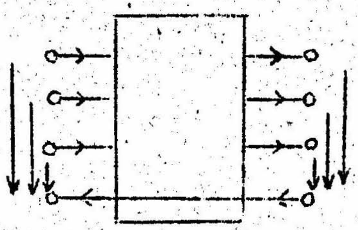


Abb. 4 Kettenvorzeichen am Mehrpol

nach Abb. 3 wollen wir als <u>symmetrische Vorzeichen</u> bezeichnen[4]. Bei klemmenzahlsymmetrischen Mehrpolen, die man in Kette schalten kann, ist es jedoch meist zweckmässig, bei den Eingangsströmen nach wie vor die hineinfliessenden, bei den Ausgangsströmen aber die herausfliessenden Ströme positiv zu rechnen (Abb. 4). Diese Vorzeichen wollen wir als <u>Kettenvorzeichen</u> bezeichnen. Es muss bei jeder Rechnung angegeben sein, ob symmetrische oder Kettenvorzeichen gelten.

<u>Die Leitwertmatrix des Mehrpols.</u>

Da es sich um einen linearen Mehrpol handelt, ist jeder Klemmenstrom eine lineare Funktion sämtlicher Klemmenspannungen. Das so entstehende lineare System von m + n Gleichungen (bei m Eingangsklemmen und n Ausgangsklemmen) der Ströme als Funktion der Klemmenspannungen nennt man die <u>Mehrpolgleichungen in Leitwertform.</u> In Matrizenform geschrieben erhält man dafür unter Benutzung der komplexen Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \\ i_{m+1} \\ \vdots \\ i_{m+n} \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \\ \vdots \\ u_{m+n} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

4) Bei erdfreien Mehrpolen wählt man in jedem Klemmenpaar eine beliebige Klemme als positive Spannungsklemme.

Dabei ist die Leitwertmatrix y eine quadratische Matrix mit m + n Reihen, deren Elemente i.a. komplex sind und die die Dimension von Leitwerten haben. Für den Fall der Uebertragungssymmetrie ist bei symmetrischen Vorzeichen y symmetrisch, d.h. spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen.

Klemmenzahl-unsymmetrische Mehrpole.

1) Definition der verschiedenen Netzwerkmatrizen.

a) Die Leitwertmatrix.

Wenn wir zwei Gruppen von Klemmen, die Eingangsklemmen und die Ausgangsklemmen unterscheiden, zerfällt die Leitwertmatrix in 4 Teilmatrizen. Mit den Definitionen der Eingangsgrössen

$$U_1 \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} : \quad J_1 \equiv \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} \tag{2a}$$

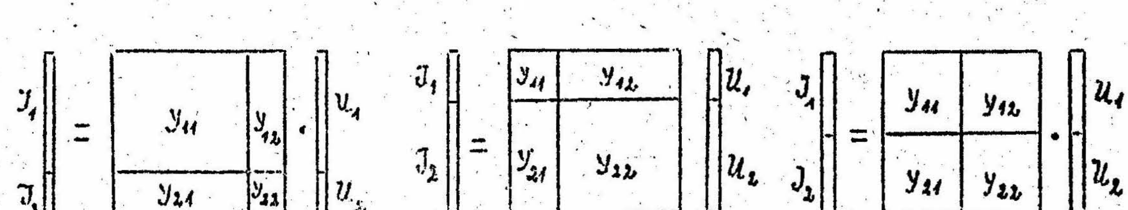
und der Ausgangsgrössen

$$U_2 \equiv \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ \vdots \\ u_{m+n} \end{pmatrix} : \quad J_2 \equiv \begin{pmatrix} i_{m+1} \\ \vdots \\ i_{m+n} \end{pmatrix} \tag{2b}$$

erhalten wir die Mehrpolgleichungen in Leitwertform:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Es gibt folgende drei Formen dieses Systems von Matrizengleichungen:



m > n m < n m = n

Es sind also in jedem Fall y_{11} und y_{22} quadratische Matrizen; wir können sie daher im allgemeinen als regulär voraussetzen (also det $y_{11} \neq 0$ und det $y_{22} \neq 0$, so dass die reziproken Matrizen y_{11}^{-1} und y_{22}^{-1} existieren). Im Falle der Klemmenzahlsymmetrie ($m = n$), den wir später besonders behandeln wollen, können wir diese Voraussetzung auch für y_{12} und y_{21} machen, die im allgemeinen Fall $m \neq n$ rechteckig sind, also dann bestimmt keine reziproke Matrix haben.

b) Die Widerstandsmatrix.

Stellt man umgekehrt die Spannungen als Funktion der Ströme dar, so erhält man die Widerstandsform der Mehrpolgleichungen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

c) Reihenparallelmatrix und Parallelreihenmatrix.

Zwei weitere Verknüpfungsmöglichkeiten der vier Vektoren U_1, U_2, J_1, J_2 sind die folgenden:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ J_2 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Die Bezeichnungen "Reihenparallelmatrix" für (5) und "Parallelreihenmatrix" für (6) hängen mit der Zusammenschaltung von Mehrpolen zusammen und sollen an anderer Stelle erörtert werden. Für Vierpole definiert Feldtkeller eine von (5) abweichende Form der Reihenparallelmatrix:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ J_1 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

die die Forderung erfüllt, dass die beiden Elemente der Hauptdiagonalen die gleiche Dimension haben. Es ist:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{12} & D_{11} \\ D_{22} & D_{21} \end{pmatrix} \qquad (7a)$$

Eine Gegenüberstellung der Formeln nach beiden Definitionen zeigt jedoch, dass die Definition der h-Parameter nach (5), die z.B. in der amerikanischen Transistorliteratur üblich ist, zweckmässiger ist. Z.B. ergibt sich bei der Erweiterung auf Mehrpole für die Feldtkellersche Definition folgende Form der Teilmatrizen:

D_{11}	D_{12}
D_{21}	D_{22}

während bei der Definition (5) wie bei allen übrigen Netzwerkmatrizen die Teilmatrizen der Hauptdiagonale quadratisch sind.

Die beiden letzten Matrizen, die noch möglich sind, nämlich die Kettenmatrix vorwärts und rückwärts, lassen sich nur für den Sonderfall der Klemmenzahlsymmetrie (m = n) definieren.

2) Beziehungen zwischen den einzelnen Netzwerkmatrizen.

Es ist leicht möglich, die verschiedenen Formen der Netzwerkgleichungen (3) und (6) ineinander überzuführen und dadurch die Teilmatrizen der einen Form als Funktion der Teilmatrizen der anderen auszudrücken. Tabelle 2 zeigt diese Zusammenhänge, die den Uebergang von der einen Form in die andere ermöglichen. Bei der Berechnung ist jedoch streng darauf zu achten, dass es sich immer um Matrizengleichungen handelt. Insbesondere muss man die vorderen und die hinteren Multiplikationen auseinanderhalten, man darf also nicht ohne weiteres die Reihenfolge der Faktoren vertauschen. Ausserdem muss man sich vor der Bildung der reziproken Matrix davon überzeugen, dass die Matrix regulär ist, d.h. dass ihre Determinante von Null verschieden ist. Dazu ist eine notwendige Voraussetzung, dass die Matrix quadratisch ist. Die Matrizen mit ungleichen Indizes y_{12}, y_{21}, w_{12}, w_{21}, h_{12}, h_{21} und g_{12}, g_{21} sind bei klemmenzahlunsymmetrischen Mehrpolen rechteckig, haben also in diesem Fall schon aus diesem Grunde keine Reziproke. Von den Matrizen mit gleichen Indizes y_{11}, y_{22} usw. können und wollen wir jedoch Regularität voraussetzen.

Die Definitionen der Netzwerkmatrizen (3) und (6) sowie die weiterhin abgeleiteten Beziehungen der Matrizen untereinander gelten zunächst für symmetrische Vorzeichen. Die Formeln bleiben jedoch unverändert, wenn man in allen Fällen Kettenvorzeichen annimmt. In Tabelle 2 ist daher vermerkt, dass die Formeln für symmetrische Vorzeichen oder für Kettenvorzeichen gelten. Rechnet man jedoch teilweise in symmetrischen Vorzeichen und teilweise in Kettenvorzeichen, dann treten in den Formeln Vorzeichenänderungen auf.

Wir wollen hier als Beispiel einige Beziehungen der Tabelle 2 ableiten:

a) <u>Leitwerkmatrix - Widerstandsmatrix.</u>

Nach (3):
$$J_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \tag{3a}$$
$$J_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \tag{3b}$$

aus (3a) durch vordere Multiplikation mit y_{11}^{-1}, der Reziproken von y_{11}:
$$U_1 = y_{11}^{-1}J_1 - y_{11}^{-1}y_{12}U_2 \tag{3a'}$$

Einsetzen in (3b)
$$J_2 = y_{21}y_{11}^{-1}J_1 - y_{21}y_{11}^{-1}y_{12}U_2 + y_{22}U_2 \tag{3b'}$$

$$(y_{22} - y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})U_2 = -y_{21}y_{11}^{-1}J_1 + J_2$$

Unter der Voraussetzung, dass det $(y_{22} - y_{21}y_{11}^{-1}y_{12}) \neq 0$ ist, erhalten wir daraus durch vordere Multiplikation die zweite Gleichung der Widerstandsform:
$$U_2 = -(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1}y_{21}y_{11}^{-1}J_1+(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1}J_2$$
$$\equiv w_{21}J_1+w_{22}J_2 \tag{4b}$$

Andererseits ergibt sich durch vordere Multiplikation mit y_{22}^{-1} aus (3b):
$$U_2 = y_{22}^{-1}J_2 - y_{22}^{-1}y_{21}U_1 .$$

Durch Einsetzen in (3a) erhalten wir damit in gleicher Weise wie oben unter der Voraussetzung det $(y_{11} - y_{12}y_{22}^{-1}y_{21}) \neq 0$ die erste Gleichung der Widerstandsform:

$$U_1 = (y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1}J_1-(y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1}y_{12}y_{22}^{-1}J_2$$
$$\equiv w_{11}J_1 + w_{12}J_2 \; . \qquad (4a)$$

Damit ist die Umformung Leitwertmatrix - Widerstandsmatrix durchgeführt.

Es gibt allerdings noch einen anderen Weg hierfür. Setzt man nämlich, um (4a) zu erhalten, (4b) in (3a') ein, so erhält man:

$$U_1 = \left[y_{11}^{-1}+y_{11}^{-1}y_{12}(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1}y_{21}y_{11}^{-1}\right] J_1$$
$$-y_{11}^{-1}y_{12}(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1}J_2 \; . \qquad (4a^{*})$$

Damit dieses Ergebnis mit (4a) übereinstimmt, müssen einerseits die beiden Faktoren von J_2 gleich sein. Es muss also die Beziehung gelten:

$$y_{11}^{-1}y_{12}(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1} = (y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1}y_{12}y_{22}^{-1} \qquad (4c)$$

deren Richtigkeit man durch vordere Multiplikation mit $(y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})$ und hintere Multiplikation mit $(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})$ nachweisen kann.

Mit Hilfe der Beziehung (4c) lässt sich auch zeigen, dass die Faktoren von J_1 in (4a) und ($4a^{*}$) gleich sind.

Da $w = y^{-1}$ ist, gelten die Gleichungen (4a), (4b) und die Beziehung (4c) ganz allgemein für die Bildung der reziproken Matrix einer aus 4 Teilmatrizen bestehenden Matrix. Man kann sie daher auch auf folgende Matrizenbeziehung/en/ anwenden:
$y = w^{-1}$, $h = g^{-1}$, $g = h^{-1}$ (vgl. die Ergebnisse in der Zusammenstellung Tabelle 2).

b) Leitwertmatrix - Reihenparallelmatrix.

Die Reihenparallelmatrix h als Funktion der Leitwertmatrix y liest man ohne weiteres aus (3a') und (3b') ab. Die umgekehrte

Beziehung erhält man aus der Definition (5).

$$U_1 = h_{11}J_1 + h_{12}U_2 \quad (5a)$$

$$J_2 = h_{21}J_1 + h_{22}U_2 \quad (5b)$$

Durch vordere Multiplikation von (5a) mit h_{11}^{-1} :

$$J_1 = h_{11}^{-1}U_1 - h_{11}^{-1}h_{12}U_2$$

ergibt sich bereits die erste Gleichung der Leitwertform. Setzt man diese Gleichung in (5b) ein, so erhält man die zweite Gleichung:

$$J_2 = h_{21}h_{11}^{-1}U_1 + (h_{22}-h_{21}h_{11}^{-1}h_{12})\ U_2.$$

c) <u>Widerstandsmatrix - Reihenparallelmatrix.</u>

Aus (5b) durch vordere Multiplikation mit h_{22}^{-1}

$$U_2 = h_{22}^{-1}J_2 - h_{22}^{-1}h_{21}J_1$$

ergibt bereits die zweite Gleichung der Widerstandsform. Einsetzen in (5a)

$$U_1 = h_{11}J_1+h_{12}h_{22}^{-1}J_2-h_{12}h_{22}^{-1}h_{21}J_1$$

ergibt die erste Gleichung, so dass man die w - Matrix aufschreiben kann, Aus yw = E erhält man eine Kontrolle der Rechnung. Nach dem gleichen Schema gewinnt man die Reihenparallelmatrix aus der Widerstandsmatrix.

<u>Klemmenzahl-symmetrische Mehrpole</u>

Bei Beschränkung auf Mehrpole, die die gleiche Anzahl von Eingangs- und Ausgangsklemmen haben (m = n, Klemmenzahlsymmetrie), vereinfachen sich die in Tabelle 2 angegebenen Beziehungen zwischen den Netzwerkmatrizen teilweise etwas. Vor allem aber gestatten diese Mehrpole die Definition einer weiteren Netzwerkmatrix, der Kettenmatrix.

1) Beziehungen zwischen den einzelnen Netzwerkmatrizen.

Bei Klemmenzahlsymmetrie sind sämtliche Teilmatrizen quadratisch. Wir können daher z.B. voraussetzen det $y_{12} \neq 0$, det $y_{21} \neq 0$, det $w_{12} \neq 0$, det $w_{21} \neq 0$. Damit existieren die reziproken Matrizen y_{12}^{-1}, y_{21}^{-1}, w_{12}^{-1}, w_{21}^{-1}. Man erhält dann z.B. statt

$$w_{12} = (y_{11} - y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1}\ y_{12}y_{22}^{-1}$$

(vgl. (4a)) durch Berücksichtigung der Matrizenformel $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

$$w_{12} = (y_{21} - y_{22}y_{12}^{-1}y_{11})^{-1} .$$

Entsprechend ergeben sich die Werte für w_{21}, y_{12}, y_{21}, wie sie in der Tabelle 3 zusammengestellt sind.

An den Beziehungen zwischen y und h sowie w und h ergeben sich gegenüber der Klemmenzahlunsymmetrie keine Vereinfachungen.

2) Die Kettenmatrix.

In der Kettenform der Netzwerkgleichungen werden die Eingangsgrössen als Funktion der Ausgangsgrössen dargestellt:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ J_2 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

die Matrix

$$k = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (8a)$$

heisst die Kettenmatrix. Ihre Teilmatrizen A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} sind quadratisch.

Beim Rechnen mit der Kettenmatrix setzt man zweckmässig ausschliesslich Kettenvorzeichen voraus. Doch gelten alle in Tabelle 3 für Uebertragungsunsymmetrie angegebenen Formeln auch, wenn am Mehrpol symmetrische Vorzeichen angenommen werden.

3) Beziehungen der Kettenmatrix zu anderen Matrizen.

a) Kettenmatrix - Leitwertmatrix.

Da wir det $y_{21} \neq 0$ voraussetzen können, erhalten wir aus (3b) durch vordere Multiplikation mit y_{21}^{-1}:

$$U_1 = - y_{21}^{-1} y_{22} U_2 + y_{21} J_2 \qquad (9a)$$

und damit bereits die erste der beiden Kettengleichungen. Setzen wir diese in (3a) ein, so entsteht die zweite Kettengleichung:

$$J_1 = (y_{12} - y_{11} y_{21}^{-1} y_{22}) U_2 + y_{11} y_{21}^{-1} J_2 \qquad (9b).$$

b) Leitwertmatrix - Kettenmatrix

Durch Vergleich von (9a) und (9b) mit der Definition der Kettenmatrix (8a) liest man nacheinander ab:

$$y_{21} = A_{12}^{-1},\ -A_{12} y_{22} = A_{11},\ y_{22} = -A_{12}^{-1} A_{11};\ A_{22} = y_{11} A_{12},$$

$$y_{11} = A_{22} A_{12}^{-1};\quad A_{21} = y_{12} - y_{11} y_{21}^{-1} y_{22} = y_{12} + A_{22} A_{12}^{-1}\, A_{12} A_{12}^{-1} A_{11},$$

$$y_{12} = A_{21} - A_{22} A_{12}^{-1} A_{11}\ .$$

Eine Zusammenstellung dieser Werte der y-Matrix als Funktion der A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} zeigt Tabelle 3. Ebenso ergeben sich die in Tabelle 3 zusammengestellten Beziehungen zu den übrigen Matrizen. Die reziproke Kettenmatrix k^{-1} erhält man entsprechend y als Funktion von w oder w als Funktion von y.

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & (A_{21} - A_{22} A_{12}^{-1} A_{11})^{-1} \\ (A_{12} - A_{11} A_{21}^{-1} A_{22})^{-1} & (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

c) Uebertragungssymmetrie.

Bei Uebertragungssymmetrie und symmetrischen Vorzeichen sind y und w symmetrische Matrizen, d.h. sie sind spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen.

Bei den hier verwendeten Kettenvorzeichen sind daher die Hauptdiagonalteilmatrizen y_{11}, y_{22}, w_{11}, w_{22} ebenfalls symmetrisch, d.h. es ist

$$y_{11} = y'_{11},\ y_{22} = y'_{22},\ w_{11} = w'_{11},\ w_{22} = w'_{22} \tag{11a}$$

Für die beiden anderen Teilmatrizen gilt jedoch

$$y_{12} = -y'_{21},\ w_{12} = -w'_{21} \tag{11b}$$

In Kettenparametern A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} ausgedrückt lauten diese Bedingungen der Uebertragungssymmetrie

$$A_{11}A'_{12} = A_{12}A'_{11},\ A_{21}A'_{22} = A_{22}A'_{21},\ A'_{21}A_{11} = A'_{11}A_{21},$$

$$A'_{12}A_{22} = A'_{22}A_{12} \tag{12a}$$

$$A_{11}A'_{22} - A_{12}A'_{22} = E\ . \tag{12b}$$

Da man jede Matrizengleichung auch für die gespiegelten Matrizen anschreiben darf, kann man statt (12b) auch schreiben:

$$A_{22}A'_{11} - A_{21}A'_{12} = E\ .$$

Diese Beziehung (12b) ist insofern besonders interessant, als sie für den Sonderfall des Vierpols in die bekannte Bedingung für die Kettendeterminante übergeht:

$$\det k \equiv A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1\ . \tag{12b'}$$

(12b) stellt daher eine Verallgemeinerung dieser Kettendeterminanten dar.

Durch Einsetzen von (11a) und (11b) erhält man für h und g folgende Bedingungen der Uebertragungssymmetrie:

$$h_{11} = h'_{11},\ h_{22} = h'_{22},\ g_{11} = g'_{11},\ g_{22} = g'_{22} \tag{13a}$$

$$h_{12} = h'_{21},\ g_{12} = g'_{21}\ . \tag{13b}$$

Damit ergibt sich statt (10) für die reziproke Kettenmatrix:

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} A'_{22} & -A'_{12} \\ -A'_{21} & A'_{11} \end{pmatrix} \tag{14}$$

d) Widerstandssymmetrie.

Ein klemmenzahlsymmetrischer übertragungssymmetrischer Mehrpol ist widerstandslängssymmetrisch, wenn sich an seinem Verhalten beim Vertauschen der Eingangs- und Ausgangsklemme nichts ändert. Bei Verwendung von symmetrischen Vorzeichen könnte man diese Bedingung so ausdrücken, dass die Kettenmatrix gleich ihrer Reziproken ist:

$$k_s = k_s^{-1} \tag{15}$$

Bei den hier verwendeten Kettenvorzeichen hat man ausserdem die Vorzeichen von J_1 und J_2 herumzudrehen, d.h. in (14) die Vorzeichen der 2. Spalte und die 2. Zeile, so dass man erhält:

$$\begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{22} A'_{12} \\ A'_{21} A'_{11} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Die Bedingungen für die Widerstandssymmetrie lauten also:

$$A_{11} = A'_{22},\ A_{12} = A'_{12},\ A_{21} = A'_{21} \tag{17a}$$

Die Teilmatrizen A_{12} und A_{21} müssen also in diesem Fall symmetrisch sein.

Durch Einsetzen von (17a) und (11a) und (13a) ergeben sich die Bedingungen für y, w, h und g:

$$y_{11} = -y_{22};\quad w_{11} = -w_{22};\quad h_{11} = -g_{22},\ g_{11} = -h_{22} \tag{17b}$$

Tabelle 1

Definition der Mehrpolmatrizen.

U_1 = Spaltenmatrix der Eingangsspannungen

U_2 = " " Ausgangsspannungen

J_1 = " " Eingangsströme

J_2 = " " Ausgangsströme

Klemmenzahlunsymmetrische Mehrpole ($m \neq n$)

Leitwertmatrix

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Widerstandsmatrix

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

Reihenparallelmatrix

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Parallelreihenmatrix

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

Für klemmenzahlsymmetrische Mehrpole ($m = n$) ausserdem:

Kettenmatrix

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

Tabelle 2

Klemmenzahlunsymmetrische Mehrpole

Symmetrische Vorzeichen oder Kettenvorzeichen.

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = w^{-1} = \begin{pmatrix} (w_{11}-w_{12}w_{22}^{-1}w_{21})^{-1} & -(w_{11}-w_{12}w_{22}^{-1}w_{21})^{-1}w_{12}w_{22}^{-1} \\ -(w_{22}-w_{21}w_{11}^{-1}w_{12})^{-1}w_{21}w_{11}^{-1} & (w_{22}-w_{21}w_{11}^{-1}w_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11}^{-1} & -h_{11}^{-1}h_{12} \\ h_{21}h_{11}^{-1} & h_{22}-h_{21}h_{11}^{-1}h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}-g_{12}g_{22}^{-1}g_{21} & g_{12}g_{22}^{-1} \\ -g_{22}^{-1}g_{21} & g_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(w_{22}-w_{21}w_{11}^{-1}w_{12})^{-1}w_{21}w_{11}^{-1} = w_{22}^{-1}w_{21}(w_{11}-w_{12}w_{22}^{-1}w_{21})^{-1}$$

$$w \equiv \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = y^{-1} = \begin{pmatrix} (y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1} & -(y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1}y_{12}y_{22}^{-1} \\ -(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1}y_{21}y_{11}^{-1} & (y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11}-h_{12}h_{22}^{-1}h_{21} & h_{12}h_{22}^{-1} \\ -h_{22}^{-1}h_{21} & h_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^{-1} & -g_{11}^{-1}g_{12} \\ g_{21}g_{11}^{-1} & g_{22}-g_{21}g_{11}^{-1}g_{12} \end{pmatrix}$$

$$(y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1}y_{21}y_{11}^{-1} = y_{22}^{-1}y_{21}(y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1}$$

$$h \equiv \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}^{-1} & -y_{11}^{-1}y_{12} \\ y_{21}y_{11}^{-1} & y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}-w_{12}w_{22}^{-1}w_{21} & w_{12}w_{22}^{-1} \\ -w_{22}^{-1}w_{21} & w_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= g^{-1} = \begin{pmatrix} (g_{11}-g_{12}g_{22}^{-1}g_{21})^{-1} & -(g_{11}-g_{12}g_{22}^{-1}g_{21})^{-1}g_{12}g_{22}^{-1} \\ -(g_{22}-g_{21}g_{11}^{-1}g_{12})^{-1}g_{21}g_{11}^{-1} & (g_{22}-g_{21}g_{11}^{-1}g_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(g_{22}-g_{21}g_{11}^{-1}g_{12})^{-1}g_{21}g_{11}^{-1} = g_{22}^{-1}g_{21}(g_{11}-g_{12}g_{22}^{-1}g_{21})^{-1}$$

$$g \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = h^{-1} = \begin{pmatrix} (h_{11}-h_{12}h_{22}^{-1}h_{21})^{-1} & -(h_{11}-h_{12}h_{22}^{-1}h_{21})^{-1}h_{12}h_{22}^{-1} \\ -(h_{22}-h_{21}h_{11}^{-1}h_{12})^{-1}h_{21}h_{11}^{-1} & (h_{22}-h_{21}h_{11}^{-1}h_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(h_{22}-h_{21}h_{11}^{-1}h_{12})^{-1}h_{21}h_{11}^{-1} = h_{22}^{-1}h_{21}(h_{11}-h_{12}h_{22}^{-1}h_{21})^{-1}$$

Tabelle 3

Klemmenzahlsymmetrische Mehrpole

det $y_{12} \neq 0$, det $y_{21} \neq 0$, det $w_{12} \neq 0$, det $w_{21} \neq 0$

a) Uebertragungsunsymmetrie

Kettenvorzeichen(oder symmetrische Vorzeichen).

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = w^{-1} = \begin{pmatrix} (w_{11}-w_{12}w_{22}^{-1}w_{21})^{-1} & (w_{21}-w_{22}w_{12}^{-1}w_{11})^{-1} \\ (w_{12}-w_{11}w_{21}^{-1}w_{22})^{-1} & (w_{22}-w_{21}w_{11}^{-1}w_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{22}A_{12}^{-1} & A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} \\ A_{12}^{-1} & -A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix}$$

$$w \equiv \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = y^{-1} = \begin{pmatrix} (y_{11}-y_{12}y_{22}^{-1}y_{21})^{-1} & (y_{21}-y_{22}y_{12}^{-1}y_{11})^{-1} \\ (y_{12}-y_{11}y_{21}^{-1}y_{22})^{-1} & (y_{22}-y_{21}y_{11}^{-1}y_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}^{-1} & A_{12}-A_{11}A_{21}^{-1}A_{22} \\ A_{21}^{-1} & -A_{21}^{-1}A_{22} \end{pmatrix}$$

$$h \equiv \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}A_{22}^{-1} & A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ A_{22}^{-1} & -A_{22}^{-1}A_{21} \end{pmatrix}$$

$$g \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

y als Funktion von h bzw. g, w als Funktion von h bzw. g und h als Funktion von y bzw. w wie bei Klemmenzahlunsymmetrie (Tab. 1).

$$k \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_{21}^{-1}y_{22} & y_{21}^{-1} \\ y_{12}-y_{11}y_{21}^{-1}y_{22} & y_{11}y_{21}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}w_{21}^{-1} & w_{12}-w_{11}w_{21}^{-1}w_{22} \\ w_{21}^{-1} & -w_{21}^{-1}w_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{12}-h_{11}h_{21}^{-1}h_{22} & h_{11}h_{21}^{-1} \\ -h_{21}^{-1}h_{22} & h_{21}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{21}^{-1} & -g_{21}^{-1}g_{22} \\ g_{11}g_{21}^{-1} & g_{12}-g_{11}g_{21}^{-1}g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{21}^{-1} & y_{21}^{-1} \\ w_{21}^{-1} & h_{21}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & (A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11})^{-1} \\ (A_{12}-A_{11}A_{21}^{-1}A_{22})^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{12}^{-1} & y_{12}^{-1} \\ w_{12}^{-1} & g_{12}^{-1} \end{pmatrix}$$

b) Uebertragungssymmetrie

Kettenvorzeichen

y_{11}, y_{22}, w_{11}, w_{22}, h_{11}, h_{22}, g_{11}, g_{22} symmetrische Matrizen

$y_{12}=-y'_{21}$; $w_{12}=-w'_{21}$; $h_{12}=h'_{21}$; $g_{12}=g'_{21}$

$A_{11}A'_{22} - A_{12}A'_{21} = E$; $A_{22}A'_{11} - A_{21}A'_{12} = E$

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} A'_{22} & -A'_{12} \\ -A'_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Widerstandssymmetrie

Kettenvorzeichen

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ -y'_{12} & -y_{11} \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_{11} & -w_{12} \\ w'_{12} & -w_{11} \end{pmatrix}$$

$h_{11}=-g_{22}$, $g_{11}=-h_{22}$

$A_{11}=A'_{22}$, $A_{12}=A'_{12}$, $A_{21}=A'_{21}$